

**Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
в 2025 – 2026 учебном году**

**Ответы и решения**

**Общие положения**

- 1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.
- 2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.
- 3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применении критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.
- 4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.
- 5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставяет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.
- 6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.
- 7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.
- 8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

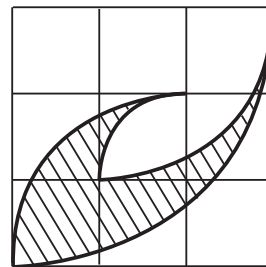
тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф.-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф.-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты [varyag2@mail.ru](mailto:varyag2@mail.ru), тел. +79220350324).

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2025 – 2026 учебном году  
11 класс**

*Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут*

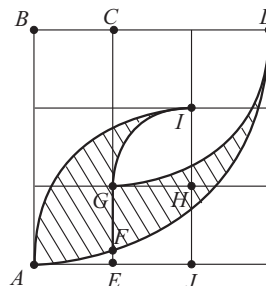


К условию задачи 11.1

**11.1.** Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (см. рисунок), границей которой является круговой сплайн — замкнутая непрерывная линия, составленная из дуг окружностей (с центрами в узлах сетки). Длина стороны клетки равна 1.

**Решение:**

Способ 1. Обозначим центры и концы дуг окружностей так, как показано на рисунке. Введём обозначение: через  $S_{X,\overline{YZ}}$  будем обозначать площадь сектора окружности с центром  $X$ , ограниченного дугой  $YZ$ . Разделим фигуру, площадь которой требуется найти, на две отрезком  $GF$  и найдём по отдельности площадь каждой из частей. Площадь правой фигуры равна  $S_{\text{пр}} = S_{B,\overline{AD}} - S_{C,\overline{GD}} - (S_{ABCE} - x)$ , где  $x$  — площадь фигурки, ограниченной отрезками  $AE$ ,  $EF$  и дугой  $AF$ .



К решению задачи 11.1,  
способ 1

Все секторы являются четвертинками кругов и их площади находятся элементарно; поэтому

$$S_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{4}\pi 2^2 - 3 + x = \frac{5\pi}{4} - 3 + x.$$

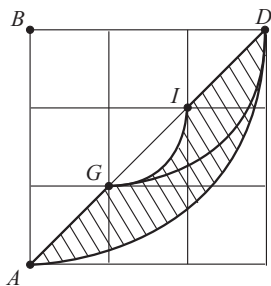
Аналогично, площадь левой фигурки равна

$$\begin{aligned} S_{\text{л}} &= S_{J,\overline{AI}} - S_{J,\overline{GI}} - S_{EGHJ} - x = \\ &= \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{1}{4}\pi 1^2 - 1 - x = \frac{3\pi}{4} - 1 - x. \end{aligned}$$

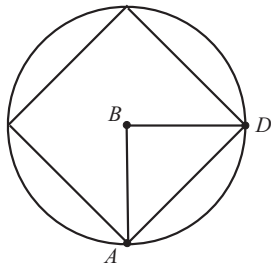
Поэтому общая площадь равна  $S_{\text{пр}} + S_{\text{л}} = 2\pi - 4$ .

Способ 2. Разрежем фигурку по прямой  $AD$ , и ту часть, которая лежит выше прямой, повернём на  $180^\circ$  (см. рисунок ниже слева). Получим равную по площади фигуру (заштрихованная часть на рисунке). Она представляет собой разность двух сегментов, линейные размеры меньшего из которых в три раза меньше линейных размеров большего. Так как площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, интересующая нас площадь равна  $\frac{8}{9}$  площади большего сегмента. Но этот сегмент — ровно четверть площади фигуры, которая получится, если из круга радиуса 3 удалить вписанный в него квадрат (см. рисунок ниже справа), поэтому его площадь равна  $\frac{1}{4}(9\pi - (3\sqrt{2})^2)$ . Тогда искомая площадь равна

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{9\pi - 18}{4} = 2\pi - 4.$$



К решению задачи 11.1, способ 2, разрез фигуры



К решению задачи 11.1, способ 2, удаление квадрата

**Ответ:**  $2\pi - 4$ .

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	5 баллов
Задача верно сведена к нахождению площадей круговых секторов и/или сегментов с известными центральными углами, но расчёты не выполнены	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

**11.2.** Пусть  $P(x)$  — квадратный трёхчлен. Действительные числа  $a, b, c$  попарно различны и таковы, что  $P(a) = bc$ ,  $P(b) = ca$ ,  $P(c) = ab$ . Какие значения может принимать выражение

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)}?$$

Ответ обоснуйте.

**Решение:** Пусть  $P(x) = mx^2 + nx + t$ . Тогда (учитывая, что  $a - b \neq 0$ ) имеем  $P(a) - P(b) = m(a + b)(a - b) + n(a - b) = c(b - a)$ , откуда  $m(a + b) + n = -c$ . Аналогично  $m(b + c) + n = -a$ . Вычтем из одного уравнения другое и получим  $m = 1$  (опять-таки учли, что  $a - c \neq 0$ ). Тогда

$$n = -(a + b + c), \quad t = ab + ac + bc, \\ p(x) = x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc,$$

наше выражение тождественно равно 1, так как

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)} = \frac{bc + ca + ab}{(a + b + c)^2 - (a + b + c)(a + b + c) + ab + ac + bc} = 1.$$

**Ответ:** 1.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Задача решена для случая приведённого квадратного трёхчлена	4 балла
Условие задачи верно записано в виде системы уравнений (неизвестные — коэффициенты трёхчлена)	2 балла
Верный ответ, проиллюстрированный конкретным трёхчленом (и конкретной тройкой чисел $a, b, c$ )	1 балл
Ответ без обоснования, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

**11.3.** У натурального числа  $n$  нашлись два различных натуральных делителя  $m$  и  $k$ , для которых выполнено равенство

$$k = \frac{n - m}{m - 5}.$$

Докажите, что число  $\frac{n}{5}$  — целое и является квадратом натурального числа.

**Решение:** Уравнение из условия задачи равносильно равенству  $km - 5k + m = n$ . Число  $m = n + 5k - km$  делится без остатка на  $k$ , так как  $k$  — делитель каждого слагаемого в правой части. Аналогично, число  $5k = -n + m + km$  делится без остатка на  $m$ . Пусть  $m = tk$ , где  $t \in \mathbb{N}$ . Тогда  $5k$  кратно числу  $tk$ , то есть 5 кратно  $t$ . Значит, либо  $t = 1$ , либо  $t = 5$ . Первый случай невозможен, так как  $m \neq k$  по условию. Итак,  $t = 5$ ,  $m = 5k$ ,  $n = km = 5k^2$ . Тогда  $\frac{n}{5} = k^2$ , ч. т. д.

Ещё подчеркнём, что искомые тройки чисел  $m, k$  и  $n$  существуют. Например,  $n = 45$ ,  $k = 3$ ,  $m = 15$ .

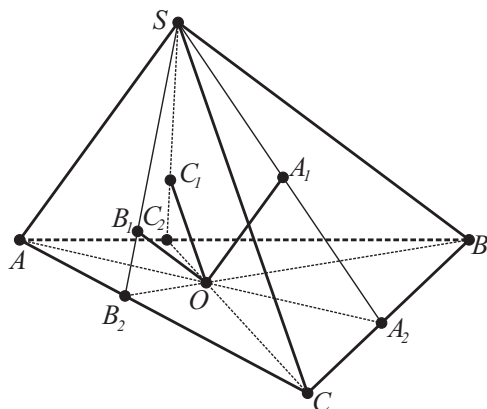
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример натуральных чисел $n, m$ и $k$ , удовлетворяющих условию задачи	баллы не снижать
Доказано, что а) число $m$ кратно $k$ ; б) число $m$ является делителем числа $5k$	4 балла
Доказан один из пунктов а) или б) критерия на 4 балла	2 балла
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

**11.4.** Из произвольной точки  $O$ , лежащей на грани  $ABC$  треугольной пирамиды  $SABC$  провели прямые  $OA_1 \parallel SA$ ,  $OB_1 \parallel SB$  и  $OC_1 \parallel SC$  (точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на гранях  $SBC, SCA$  и  $SAB$  соответственно). Докажите равенство

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

**Решение:** Пусть плоскость  $ASO$  пересекает ребро  $BC$  в точке  $A_2$ , тогда эта плоскость пересекает грань  $SBC$  по отрезку  $SA_2$ . Прямая  $OA_1$  лежит в плоскости  $SAO$ , так как она имеет с ней общую точку  $O$  и параллельна лежащей в ней прямой  $SA$ . Значит, точка  $A_1$  лежит на отрезке  $SA_2$ . Аналогично точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на отрезках  $SB_2$  и  $SC_2$  соответственно (точки  $B_2$  и  $C_2$  определяются аналогично точке  $A_2$ ) — см. рисунок.



К решению задачи 11.4, расположение точек  $A_1, B_1, C_1$

Из подобных треугольников  $A_2A_1O$  и  $A_2SA$  получаем равенство

$$\frac{OA_1}{SA} = \frac{A_2O}{A_2A}.$$

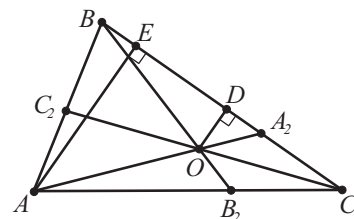
Конечно, такие же равенства верны и для двух других дробей:

$$\frac{OB_1}{SB} = \frac{B_2O}{B_2B}, \quad \frac{OC_1}{SC} = \frac{C_2O}{C_2C}.$$

Задача свелась к планиметрической: «если на сторонах  $AB, AC$  и  $BC$  выбраны соответственно точки  $C_2, B_2$  и  $A_2$  так, что отрезки  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в точке  $O$ , то выполняется равенство

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = 1.$$

Докажем это утверждение.



К решению задачи 11.4, картина в основании пирамиды

Опустим из точек  $A$  и  $O$  перпендикуляры на прямую  $BC$  — отрезки  $OD$  и  $AE$  (см. рисунок). Тогда из подобия треугольников  $AA_2E$  и  $OA_2D$  следует, что

$$\frac{OA_2}{A_2A} = \frac{OD}{AE} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OD}{\frac{1}{2}BC \cdot AE} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\frac{OB_2}{B_2B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}}, \quad \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}}.$$

Значит,

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}} = \frac{S_{BAC}}{S_{BAC}} = 1.$$

Доказательство завершено.

**Примечание:** Для школьников, знающих формулу объёма пирамиды, задача допускает следующее решение: Пирамида  $SABCD$  представляется как объединение трёх пирамид  $SABO, SBCO, SCAO$ . Каждая из дробей в доказываемой формуле равна отношению объёмов одной из этих пирамид к объёму всей пирамиды  $SABC$  — доказательство почти такое же, как в приведённом выше решении для площадей треугольников.

Рекомендации по проверке:

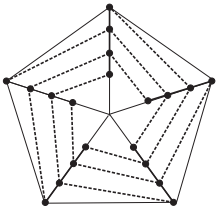
Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Задача верно сведена к планиметрической ИЛИ дроби в доказываемом равенстве представлены в виде отношения объёмов пирамид	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также решения в частных случаях (для конкретных точек $O$ )	0 баллов

**11.5.** Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырёх человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена, и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах. Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей? Ответ обоснуйте.

**Решение:** Добавим к каждому человеку его двойника, но потребуем, чтобы каждый человек был в составе не более, чем одного экипажа. Тогда для 10 экипажей

потребуется ровно 40 человек, поэтому до добавления двойников в центре подготовки было по крайней мере 20 человек. Покажем, что 20 человек достаточно. Сначала сформируем из них пять экипажей, не имеющих общих членов. При своём этим экипажам номера от 1 до 5. В шестой экипаж отрядим по одному космонавту из экипажей 1, 2, 3, 4. В седьмой — по одному из экипажей 1, 2, 3, 5 (берём других космонавтов), в восьмой — из экипажей 1, 2, 4, 5, в девятый — из экипажей 1, 3, 4, 5, наконец, в десятый — 2, 3, 4, 5. Условие задачи выполнено.

**Примечание:** Сформировать экипажи нужным образом можно и чисто геометрически, например, так. Построим космонавтов в пять колонн, по 4 человека в каждой, а каждую колонну поставим на своей линии, идущей от вершины правильного пятиугольника к его центру. Первые пять экипажей — сами колонны (см. рисунок). Теперь дальних от центра пятиугольника космонавтов не двигаем, тех кто стоит непосредственно перед ними (второй ряд) сдвинем по кругу влево на одного человека, третий ряд — влево на двух человек, а четвёртый — влево на трёх. Космонавты, оказавшиеся после сдвигов в одной колонне, образуют ещё пять экипажей — пунктирные линии на рисунке.



К примечанию  
к задаче 11.5

**Ответ:** 20 космонавтов.

*Рекомендации по проверке:*

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Пример на 20 человек	4 балла
Доказано, что необходимо не менее 20 человек	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

**11.6.** Известно, что числа  $\sin 2x$ ,  $\sin 5x$  и  $\sin 7x$  являются рациональными, и ни одно из них не равно 0. Докажите, что тогда число  $\sin 12x$  также является рациональным.

**Решение:** Пусть

$$\begin{aligned} \sin 2x &= a, & \sin 5x &= b, & \sin 7x &= c, & \sin 12x &= d, \\ \cos 2x &= X, & \cos 5x &= Y, & \cos 7x &= Z. \end{aligned}$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a = \sin 2x = \sin (7x - 5x) = cY - bZ, \\ b = \sin 5x = \sin (7x - 2x) = cX - aZ, \\ c = \sin 7x = \sin (5x + 2x) = bX + aY. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что

$$Y = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2ac} \text{ и } Z = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2ab}$$

являются рациональными числами, поскольку числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — рациональные. Для решения задачи остается заметить, что  $d = \sin 12x = \sin (5x + 7x) = bZ + cY$  — рациональное число.

**Примечание:** Числа  $x$ , синусы которых удовлетворяют условию задачи, существуют, так что задача корректно определена. Действительно, достаточно взять любое число  $x$ , для которого и  $\sin x$ , и  $\cos x$  являются рациональными числами, например  $x = \arcsin 0,6$ . В этом случае все числа вида  $\sin nx$  и  $\cos nx$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) будут рациональны (доказывается индукцией по  $n$ ).

*Рекомендации по проверке:*

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример числа $x$ , удовлетворяющего условию задачи	баллы не снижать
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов